Proposition

Le produit de 37 par un multiple de 3 est un entier composé de chiffres identiques :
37x0=000
37x3=111
37x6=222
37x9=333
37x12=444
37x15=555
37x18=666
37x21=777
37x24=888
37x27=999

Examen de la proposition

Soit k un entier naturel. Tout multiple de 3 est un entier de la forme 3k.
Or 37x(3k) = 111k.
La proposition est donc vraie de façon évidente pour $k \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.
Elle est malheureusement fausse en général si k est un entier supérieur ou égal à 10 : par exemple 111x12=1332. Cette proposition (vraie si l'on précise que le multiple de 3 doit être compris entre 0 et 27) restera donc une simple anecdote arithmétique !

Allons plus loin

On peut chercher à savoir s'il *existe* des entiers k supérieurs ou égaux à 10 pour lesquels la proposition est vraie, c'est à dire pour lesquels 111k est un entier N composé de chiffres identiques. Il existe en effet de tels entiers car, dès que le nombre de chiffres de N est un multiple de 3 (notons (S) cette condition), N est divisible par 111 : par exemple, 111111=111(1000+1). k=1001 répond donc à la question. Il en sera de même de tous les entiers k de la forme $1+10^3+10^6+...+10^{3p}$ pour tout entier naturel p ainsi que de leurs produits par 2,3,...,9. Reste à savoir si ce sont *les seuls*. Le problème revient à chercher les entiers N composés de chiffres identiques qui sont divisibles par 111 car alors le quotient de N par 111 fournira un entier k répondant à la question. N est de la forme qx111...11 où $q \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Pour que N soit divisible par 111, il est *nécessaire* que N soit divisible par 3 *et* 37 qui sont tous deux premiers. q ne pouvant être divisible par 37, il est donc nécessaire que M=111...11 le soit. Or $M=(10^n-1)/9$ où n est le nombre de chiffres de M ($n \geq 4$ car nous avons réglé depuis longtemps le problème pour n=3). M est donc divisible par 37 si 10^n-1 l'est. ***Rappelons que l'on note a=b(c) la relation « le reste de la division de a par c est b ».*** Nous cherchons les naturels n tels que $10^n-1=0(37)$, c'est à dire tels que $10^n=1(37)$. Comme $10^3=1(37)$, on a les égalités suivantes :
$10^{3p}=(10^3)^p=1(37)$
$10^{3p+1}=10\text{x}10^{3p}=10(37)$
$10^{3p+2}=100\text{x}10^{3p}=100(37)=26(37)$.
Conclusion : on a $10^n-1=0(37)$ *si et seulement si* n est un multiple de 3 (on peut remarquer qu'alors N est *nécessairement* divisible par 3). La condition (S) énoncée précédemment est donc *nécessaire et suffisante*.

Énoncé définitif de la proposition

Le produit de 37 par un multiple de 3 est un entier composé de chiffres identiques, *si et seulement si* ce multiple de 3 est de la forme $3m\sum_{i=0}^{p}10^{3i}$ où $m \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ et où p est un naturel quelconque.

Remarque : $\sum_{i=0}^{p}10^{3i} = \frac{10^{3p+3}-1}{999}$, si bien que la forme du multiple de 3 peut s'écrire $m\frac{10^{3p+3}-1}{333}$.